Concursul de selecție **MICII CAMPIONI** – ediția 2013 Prima zi

BAREM Joi, 06 iunie 2013

1. Câte triunghiuri apar în figura alăturată? Justificați răspunsul.

Barem

- Pentru afirmații directe și greșite asupra numărului de triunghiuri se acordă 1p
- Pentru afirmații directe și corecte asupra numărului de triunghiuri se acordă max 3p
- Pentru metode de numărare și rezultat greșit se acordă max 3p
- Pentru justificarea integrală a rezultatului corect se acordă 7p

2. Făt Frumos vrea să ghicească câte farfurii de mâncare a devorat mâncăciosul Fomilă. Imparatul Roșu îi dezvăluie că numărul de farfurii este egal cu ultimele 4 cifre ale celui de-al 2013-lea termen al șirului 3, 15, 24, 48, 63, 99 ... .Fiecare termen al șirului este determinat ca cel mai mare număr care se împarte exact la 3 și este mai mic ca un pătrat perfect. Câte farfurii a mâncat Fomilă?

Barem

- Pentru încercări aproximative de determinare a formulei se acordă 1p
- Pentru determinarea corectă a formulei pentru primilor termeni ai șirului se acordă max 3p
- Pentru justificarea integrală a rezultatului corect se acordă 7p

3. Aflaţi toate numerele de trei cifre care se micşorează de şase ori după ştergerea primei cifre.

Barem

- scrierea relației $\overline{abc} = 6x\overline{bc}$ 1p
- scrierea relației $\overline{bc} = 20a$ 1p
- Pentru cazurile a=1,2,3,4 1p/caz
- Pentru restul de cazuri 1p

4. Se atribuie fiecărui vârf al unui cub un număr natural de la 1 la 8, astfel încât oricăror două vârfuri distincte să nu li se atribuie acelaşi număr. Se atribuie fiecărei feţe un număr egal cu suma numerelor atribuite vârfurilor care o determină.

a) Să se arate că dacă există o faţă căreia i s-a atribuit numărul 18, atunci mai există cel puţin o faţă cu acelaşi număr atribuit.

b) Să se arate că există patru feţe cu suma numerelor atribuite egală cu 72.

c) Să se arate că dacă există două feţe cu suma numerelor atribuite egală cu 48, atunci sigur există o faţă cu numărul atribuit mai mic decât 13.

Barem

a) Suma numerelor atribuite celor *8* vârfuri este *1+2+...+8=36*. Dacă a_1, a_2, a_3, a_4 sunt numerele atribuite unei fețe și $a_1+a_2+a_3+a_4=18$ atunci fața opusă are atribuit numărul $a_5+a_6+a_7+a_8=36-(a_1+a_2+a_3+a_4)=18$ 3p

b) Suma numerelor atribuite pentru 2 fețe opuse este a1+a2+...+ a8=36. Deci 2 perechi decâte 2 fețe opuse au suma 72. 2p

c) Cum fețele opuse au suma numerelor atribuite 36, atunci cele 2 fețe cu suma 48 sunt fețe alăturate. Fie a1, a2, a3, a4, a5,a6 sunt numerele atribuite vârfurilor celor 2 fețe alăturate, iar a3, a4 numerele atribuite laturii comune. Atunci a1+a2+2(a3+ a4)+ $a_5+a_6=48$. *Valoarea maximă a sumei când* a_3+a_4 *este maximă. Se arată prin reducere la absurd că* a_3, a_4 *sunt 7, 8 nu neapărat în această ordine. Deci* a_1, a_2, a_5, a_6 *sunt numerele 3, 4. 5, 6 nu neapărat în această ordine, rezultă* a_7, a_8 sunt numerele 1, 2. Sunt 3 variante posibile și în fiecare caz există față cu suma mai mică de 13. 2p

Observație se acordă 1p pentru formularea unor concluzii din unele exemple

5. Pe un cerc sunt scrise 2014 numere naturale astfel încât suma oricăror 30 de numere consecutive este egală cu 120. Dacă numărul de pe locul 194 este 3, ce număr este pe locul 2013 ?

Barem Se observă că pe cerc complementul oricărui grup de 4 numere consecutive fixate (restul de 2010 numere) este format din 67 grupe de 30 numere consecutive, deci orice grup de 4 numere consecutive are suma constantă. 2p

Complementul oricărui grup de 2 numere consecutive fixate (restul de 2012 numere) este format din 503 grupe de 4 numere consecutive, deci orice grup de 2 numere consecutive are suma constantă, 2p

Suma care este egală cu a 15-a parte din 120, adică 8. 1p

În concluzie, numerele de pe poziție pară sunt egale între ele, la fel și cele de pe poziție impară. 1p

Cum pe o poziție pară este valoare 3, rezultă că pe o poziție impară este valoarea 5. Răspuns 5. 1p

6. La o competiţie de tenis de masă au participat 12 elevi. Punctajul obţinut de fiecare dintre elevi la sfârşitul turneului s-a calculat ca fiind raportul dintre numărul de victorii obţinute şi numărul de meciuri jucate. Se cunoaşte faptul că fiecare dintre elevi a jucat cel puţin un meci, nefiind obligatoriu ca fiecare să joace cu fiecare.

a) Dacă niciunul dintre elevi nu a disputat mai mult de un meci cu un alt participant arătaţi că în orice moment al competiţiei au existat cel puţin doi elevi care să fi jucat acelaşi număr de meciuri;

b) Dacă fiecare dintre cei 12 participanţi a jucat acelaşi număr de meciuri, calculaţi suma punctajelor acestora; Arătaţi că indiferent de numărul de meciuri pe care le-a disputat fiecare dintre cei 12 elevi, suma punctajelor lor nu este mai mică decât 1 şi nici mai mare decât 11.

<u>Barem</u>

a) În orice moment al competiţiei, numărul minim de meciuri jucate de fiecare dintre elevi este 0 şi maxim 11, cu excepţia finalului acesteia când fiecare dintre participanţi a disputat cel puţin câte un meci 1p

Dacă la un moment dat unul dintre elevi ar fi avut disputate 11 jocuri înseamnă că a jucat cu fiecare dintre ceilalţi, deci niciunul dintre aceştia nu poate avea la acel moment 0 jocuri. 1p

Din cele 11 posibilităţi (1-11 sau 0-10), fiind vorba de 12 competitori, conform principiului lui Dirichlet cerinţa e îndeplinită. 1p

b) Fie n numărul de meciuri disputate de fiecare. Notând cu v_1, v_2, ..., v_{12} numărul de victorii înregistrate de cei 12 elevi şi cu $î_1$, $î_2$, ..., $î_{12}$ numărul înfrângerilor, avem că $v_1 + v_2 + ... + v_{12} = î_1 + î_2 + ... + î_{12} = 6n$. 2p

Punctajul cerut este $P = \frac{v_1}{n} + \frac{v_2}{n} + ... + \frac{v_{12}}{n} = \frac{6n}{n} = 6$ 2p

7. În timpul unei excursii, la o cabană de munte a poposit un grup format din 29 de băieţi şi fete. Seara se dansează. Unul dintre băieţi a dansat cu 6 fete, al doilea cu 7 fete, al treilea cu 8 fete, al patrulea cu 9 fete şi aşa mai departe. Ultimul dintre băieţi a invitat toate fetele la dans. Calculaţi câţi băieţi şi câte fete erau în acel grup.

<u>Barem</u> n = numărul de ordine al ultimului dansator = numărul băieţilor

Dansator I dansează cu 1+5 fete

Dansator II .... 2+5 fete

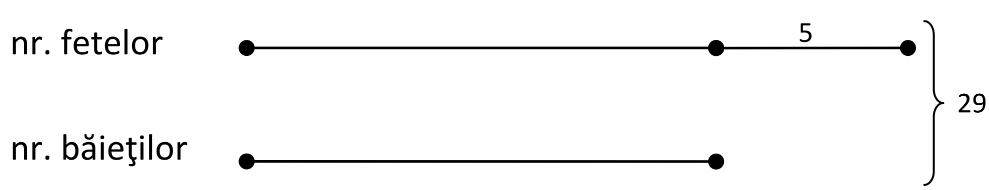
Dansator III .... 3+5 fete

Dansator IV .... 4+5 fete

......

Dansator *XII* .... *12*+5 fete, deci rezultat 12 băieți și 17 fete 2p

Fiecare dansator a dansat cu 5 fete mai mult decât numărul său de ordine, deci n + 5 = numărul fetelor 2p



29-5 = 24

n = 24:2 = 12

nr. băieţilor = 1x12 = 12

nr. fetelor = 12+5 = 17 3p

<u>Observație</u> Pentru scrierea directă a relației n + 5 = numărul fetelor și apoi justificare răspuns se acordă max. 4p

Pentru orice soluţie corectă integrală sau parţială, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.